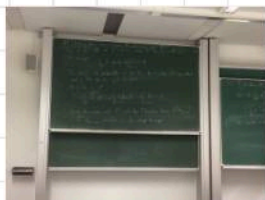


A1.

i)



$$ii) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

$$\text{Es ist } \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx}_{\text{Skalar}} e^{-y^2} dy = \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^2$$

$$\text{Es bleibt zu zeigen } \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{r(x,y)^2}} dx dy = \pi$$

$$\text{Es ist nach (i)} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-r(x,y)^2} dx dy = \pi \int_{[0, \infty)} 2r e^{-r^2} dr \stackrel{(*)}{=} [-\pi e^{-r^2}]_0^{\infty} = \pi$$

zu (\*): Nach monotoner Konvergenz ist das Integral gleich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0, n]} 2r e^{-r^2} dr = [-e^{-r^2}]_0^{\infty} \\ = \int_0^{\infty} 2r e^{-r^2} dr = [-e^{-r^2}]_0^{\infty}$$

$$\text{Somit ist } \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

## (A2) Bildmaße von Maßen mit Dichten

(i) Es sei  $\phi: (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$  messbar,  $\mu$  Maß auf  $(X, \mathcal{A})$ ,  $g \in \mathcal{M}_{[0, \infty]}(Y, \mathcal{B})$ . Dann ist

$$\phi_*(g \circ \phi) \mu = g(\phi_* \mu)$$

Sei  $B \in \mathcal{B}$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \phi_*((g \circ \phi) \mu)(B) &= ((g \circ \phi) \mu)(\phi^{-1}(B)) = \int_{\phi^{-1}(B)} (g \circ \phi) d\mu = \int_X \underbrace{(\chi_B \circ \phi)}_{\chi_{\phi^{-1}(B)}} (g \circ \phi) d\mu \\ &= \int_Y \chi_B g d(\phi_* \mu) = \int_B g d(\phi_* \mu) = (g(\phi_* \mu))(B) \end{aligned}$$

(ii) Es sei  $u \xrightarrow{\beta} v$  ein  $C^1$ -Diffeo offener Teilm. des  $\mathbb{R}^d$  und  $p \in \mathcal{K}_{[0,\infty)}(u, \beta(u))$ . Dann ist

Transf. für  $C^1$ -Diffeos

$$\begin{aligned} \Phi_* (p \beta^d | u) &\stackrel{(i)}{=} (p \circ \Phi^{-1}) (\Phi_* \beta^d | u) \stackrel{!}{=} (p \circ \Phi^{-1}) |\det d(\Phi^{-1})| \beta^d | v \\ &= p \circ \Phi^{-1} \circ \Phi \end{aligned}$$

(A3) Berechne  $\int_0^4 \frac{dx dy}{x+y}$ , wobei  $Q$  das Trapez

Betrachte dazu die Einschränkung  $\phi$  der Abb  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(u,v) \mapsto (u-uv, uv)$  auf

$$u := \mathbb{R}^2 \setminus \{u=0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{x+y=0\} =: v$$

Dann ist  $\phi$  bij. mit Umkehrabb.

$$\phi^{-1} = v \rightarrow u, (x,y) \mapsto (x+y, \frac{y}{x+y})$$

wir behaupten  $\phi^{-1}(Q) = [1,4] \times [0,1]$

Für  $(u,v) \in u$  gilt:  $\phi(u,v) \in Q = \{(x,y) : 1 \leq x+y \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$

$$\Leftrightarrow 1 \leq u \leq 4, 0 - uv = (1-v)u \geq 0, uv \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq u \leq 4, 0 \leq v \leq 1 \Leftrightarrow (u,v) \in [1,4] \times [0,1]$$

Mit  $|\det d\phi_{(u,v)}| = \begin{vmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = (1-v)u + vu = u$

$$\pi_1: u \rightarrow \mathbb{R}$$

Es ist  $3 = \int_{[1,4] \times [0,1]} 1 d\beta^2 = \int_u \chi_{\phi^{-1}(Q)} \frac{1}{\pi_1} |\det d(\phi)| \beta^d | u = \int_v \chi_Q \frac{1}{\pi_1 \circ \phi^{-1}} d\beta^d | v = \int_0^4 \frac{dx dy}{x+y}$

(A4) ( $L^2$ -Räume)

Sei  $(x, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum. Definiere für  $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(x, \mathcal{A})$

$$\|f\|_2 := \left( \int_x |f|^2 d\mu \right)^{1/2} \in [0, \infty]$$

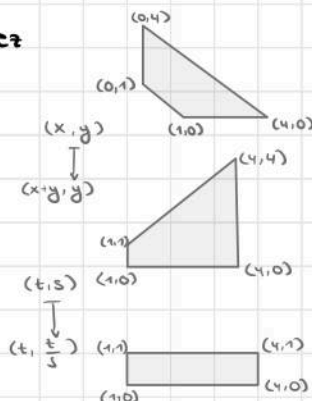
$$\mathcal{L}^2 := \mathcal{L}^2(x, \mathcal{A}, \mu) = \{f \in \mathcal{M}_{[0,\infty)}(x, \mathcal{A}) : \|f\|_2 < \infty\}$$

(i) Klar:  $0 \in \mathcal{L}^2$  und aus  $\|\lambda f\|_2 = |\lambda| \|f\|_2$  folgt Abg. unter Skalarmult.

Für  $f, g \geq 0$  ist  $\|f+g\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 + 2 \int_x fg d\mu$  und mit der p.t.w.

ungl.  $f \cdot g \leq \max(f, g)^2 = f^2 + g^2$  folgt

$$\int_x fg d\mu \leq \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 \Rightarrow fg \in \mathcal{L}^1, f+g \in \mathcal{L}^2. \text{ Durch Anwenden auf } |f| \cdot |g|$$



für bel.  $f, g \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A})$  und Ausnutzen  $|f \cdot g| = |f| \cdot |g|$  folgt, dass die Implikationen  $f, g \in \mathcal{L}^2 \Rightarrow f \cdot g \in \mathcal{L}^1$ ,  $f + g \in \mathcal{L}^2$  allg. gelten. Insbes. ist  $\mathcal{L}^2 \in \mathcal{M}$  u.v.R.

(ii)  $f, g \in \mathcal{L}^2 \Rightarrow fg \in \mathcal{L}^1$  gezeigt. Alles bis auf Cauchy-Schwarz-Ungl. klar.

Ist  $\|f\|_2 = \|g\|_2 = 0$ , so ist mit (\*) auch  $\langle f, g \rangle = 0$ .

Durch Normieren o.B.d.A.  $\|f\|_2 = 1$ .

$$\text{Es ist } 0 \leq \|f - tg\|_2^2 = \underbrace{t^2 \|g\|_2^2}_{=t^2} - 2t \langle f, g \rangle + \|f\|_2^2$$

und mit Einsetzen von  $t = \langle f, g \rangle$  folgt

$$0 \leq \langle f, g \rangle^2 - 2\langle f, g \rangle^2 + \|f\|_2^2, \text{ also}$$

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2$$

Alternativ: zeige allg.  $1 \leq p \leq +\infty$   $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$ , wobei

$$q \text{ sodass } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad (q = \frac{p}{p-1})$$

$$|f| \cdot |g| \leq \frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q}$$

$$\text{O.B.d.A.: } \|f\|_p = \|g\|_q = 1$$

Dann ist

$$\int |fg| d\mu \leq \frac{1}{p} \underbrace{\int |f|^p d\mu}_{=1} + \frac{1}{q} \underbrace{\int |g|^q d\mu}_{=\|g\|_q^q=1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\text{Mit } \|f+g\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 + 2 \underbrace{\langle f, g \rangle}_{\leq \|f\|_2 \|g\|_2} \leq (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2$$

folgt die  $\Delta$ -Ug in  $\mathcal{L}^2$ , also  $\|\cdot\|_2$  Halbnorm

(iii)  $\mathcal{L}^2$  ist vollständig. Weiter gilt: Ist  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $\mathcal{L}^2$ , so ex. eine Teilfolge  $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  die  $\mu$ -f.ü. gegen ihren Grenzwert  $f$  in  $\mathcal{L}^2$  konvergiert

Da Cauchy-Folgen mit konv. Teilf. konvergieren, genügt es z.z., dass eine Teilfolge existiert, die bzgl.  $\|\cdot\|_2$  konvergiert und die zweite Bed. erfüllt.

Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine CF. in  $\mathcal{L}^2$ . Nach Übergang zu einer TF können wir annehmen, dass  $\|f_n - f_{n+1}\| \leq \frac{1}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Nach der  $\Delta$ -UG in  $\mathcal{L}^2$  ist

$$\left\| \sum_{n=1}^N |f_n - f_{n+1}| \right\|_2 \leq \sum_{n=1}^N \|f_n - f_{n+1}\|_2 \leq 1$$

Mit monotoner Konvergenz folgt

$$\left\| \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |f_n - f_{n+1}|}_{=: h} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=1}^n |f_n - f_{n+1}| \right\|_2 \leq 1$$

Also  $h \in \mathcal{L}^2$ . Somit konvergiert  $\sum_{n=1}^{\infty} (f_n - f_{n+1})$  f.ü. absolut

Also konv.  $(f_n - f_{n+1})_n$  f.ü., d.h. es ex.  $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A})$  mit  $f_n \rightarrow f$  f.ü. pktw.

Da  $|f_n| \leq |f_1| + \sum_{i=1}^{n-1} |f_{i+1} - f_i| \leq |f_1| + h \in \mathcal{L}^2$ , ist  $|f_n - f|^2 \leq 4(|f_1| + h)^2$

und mit dominierter Konvergenz folgt  $\|f_n - f\|_2^2 \rightarrow 0$ , also  $f_n \rightarrow f$  in  $\mathcal{L}^2$ .

(iv) Folgt unmittelbar aus der vergangenen Aufgaben und der Beobachtung  
 $\langle f, g \rangle = 0$ , falls  $\|f\|_2 = 0$  oder  $\|g\|_2 = 0$

$\Rightarrow \mathcal{L}^2$  ist ein Hilbert-Raum  $\sim \mathcal{L}^2 \rightarrow (\mathcal{L}^2)^*$ ,  $f \mapsto \langle \cdot, f \rangle$  ist ein lin. Isom.

$$\star \quad |f_n - f|^2 \leq (\underbrace{|f_n|}_{\leq f_1 + h} + |f|)^2$$